第 33 卷 第 5 期 复旦学报(自然科学版) Vol.33 No.5
1994 年 10 月 Journal of Fudan University (Natural Science) Oct. 1994

电磁场量子化的新方案

卢昌海

(物理学系)

提 要 讨论了电磁场量子化的一种新方案. 首先讨论一个描述光子的新的方程式. 将此方程量子化后,就可能避免原来方法中由规范条件引起的缺点和困难.

关键词 电磁场方程; 场量子化; 能量算符

中图法分类号 O 413.2

在三种基本场(Klein-Gordon 场、Dirac 场和电磁场)的正则量子化中,最为困难的是电磁场量子化. 一般认为,自从 1950 年 S.N.Gupta 提出不定度规理论后这一问题便得到了解决[1]. 在此之前人们已经在电磁场量子化上作了许多探讨,所有这些努力的结果便形成了今天最流行的两种传统方案,它们分别是在 Coulomb 规范和 Lorentz 规范下进行的. 在写出正则对易关系 $[A_\mu, \Pi^\nu] = \mathrm{i}\,\delta_\mu^\nu \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ 之后直接处理都遇到了困难. 考察一下人们为克服这些困难所作的巨大努力是十分有益的,而且也有助于揭示隐藏在数学技巧后面的问题.

在 Coulomb 规范下正则对易关系为 $[A_i, \dot{A}_j] = \mathrm{i}\,\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, $[A_i, A_j] = [\dot{A}_i, \dot{A}_j] = 0$, 对第一式求散度便和规范条件相矛盾. 解决这一困难的方法是认为因规范条件 $\varphi = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 的限制只有两对场量是独立的. 在此基础上经过冗长的演算可得到期待的能量、动量量子化结果. 另一种传统方案是在 Lorentz 规范 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 下进行的,正则对易关系为 $[A_\mu, -\dot{A}^\nu] = \mathrm{i}\delta_\mu^\nu \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, $[A_\mu, A_\nu] = [\dot{A}^\mu, \dot{A}^\nu] = 0$. 同样的问题仍存在:以 ∂^μ 作用于第一式与规范条件矛盾. 此外,在这一方法中还出现了能量非正定的困难. 为了调和正则对易关系与规范条件的矛盾,人们在规范条件上作了让步,即不将 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 视为算符等式(从而也不认为它可以减少自由度)而将之弱化为对态的选择,认为只有满足 $\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0$ 的态才是物理上允许的. 这一观点在 Gupta 的不定度规理论下以一种复杂而精致的技巧消除了由标光子带来的能量非正定困难(然而只是在 $\langle \psi | N_3 + N_4 | \psi \rangle = 0$ 即"纵光子"与"时间光子"恰好抵消"这种相当有限的意义上消除了负能).

对比上述两个场合下所采取的方法,会有这样一个印象:对于性质相同的问题(即正

收稿日期: 1994-01-24
本文由博士生导师陶瑞宝、倪光炯教授推荐
作者卢昌海,本科生; 复旦大学物理学系,上海 200433

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

则对易关系与规范条件矛盾）却采取了截然不同的方法，在理论基础上缺乏统一性、系统性．再者，规范的选取有无穷多种，通过上述两种特定规范下的处理方法，人们无法知道，在别的规范下规范条件究竟该看成算符等式还是仅仅作为在均值意义下对态的限制？理论的这种状况无论从方法论还是从美学角度上讲都是不能令人满意的．

1　电磁场方程的新形式

传统方案的问题究竟出在哪里呢？让我们与 Dirac 场作一比较．Dirac 场中场量 ψ 的模的平方是所描述的粒子出现的概率密度．但是电磁场方程 $\partial_\mu\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu\partial_\mu A^\mu=0$ 中的 A^μ 却绝不可能视为概率幅，否则与规范变换矛盾．从这一点上讲看不出该方程与光子有什么关系，对其进行量子化的含意远不如 Dirac 场清晰．因此，鉴于前一部分举出的困难以及它与 Dirac 场之间缺乏必要的平行性，笔者认为应当放弃对 A^μ 进行量子化的传统方案．本文尝试提出一个新方案，可以克服前面所说的困难．

受 Dirac 场的启发，首先要寻找一个具有概率幅意义的量作为场量．在光学中，波场中的能量密度可以作为光子出现概率的度量．下面的讨论，除个别地方外将采用自然单位制．能量密度是 $\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2$，这启发我们将 $\boldsymbol{E}+\mathrm{i}\boldsymbol{H}$ 作为所寻找的场量：$\psi=\boldsymbol{E}+\mathrm{i}\boldsymbol{H}$. ψ 是三分量波函数，利用 ψ 可将 Maxwell 方程组改写成新的形式．

但在此之前我们先作些一般性考虑．电磁场的静场部分是不可量子化的[2]，因此所谓电磁场量子化指的是波场的量子化．从真空中的 Maxwell 方程组出发，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\ ,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0; \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\ ,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\ . \tag{2}$$

一般说来，上述方程无法彼此取代，但在波场这一情形下可以证明（1）式是不独立的．为此，对（2）式取四维 Fourier 变换，得

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}(\omega\boldsymbol{k})=\omega\boldsymbol{H}(\omega\boldsymbol{k})=0,\ \ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}(\omega\boldsymbol{k})=-\omega\boldsymbol{E}(\omega\boldsymbol{k}).$$

由此可得 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\omega\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}(\omega\boldsymbol{k})=0$，从而（1）式自动成立

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\int\boldsymbol{E}(\omega\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\boldsymbol{k}=0\,.$$

因此，对于波场来说（2）式就已经是完整的规律了．利用 ψ 可将（2）式改写为

$$\nabla\times\psi=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi\,. \tag{3}$$

利用叉乘与反对称张量间的对应关系，（3）式可进一步化为矩阵形式

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x^1} \\ -\frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 \end{bmatrix} \psi = \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi. \tag{3}$$

两边同乘 $\hbar$ (为完整起见暂用普通单位制)并引进 $P_i = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$ 得

$$c\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{p} \psi = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{s}$ 是矩阵向量：

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

(4)式在以往文献中也出现过(参见 H. E. Moses, *Phys. Rev.*, 1959, 113: 1670; J. S. Lomont, *Phys. Rev.*, 1958, 111: 1710; 倪光炯，复旦学报(自然科学版)，1994, (3/4): 125). (4)式表明，$\hat{H} = c\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{p}$. 它的一个引人注目之处在于和 Dirac 方程的相似性. 这种相似性有着深刻的内涵，笔者将证明(4)式能自动地给出光子自旋——其方式与 Dirac 方程完全相同. 先看轨道角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$，有关系式

$$[H, L_i] = [cs_l p_l, \varepsilon_{ijK} x_j p_k] = -\mathrm{i}c\hbar \varepsilon_{ijK} s_j p_K, \tag{6}$$

可见 $\boldsymbol{L}$ 不守恒. 再看$[H, s_i]$, 注意到 s_i 满足

$$[s_i, s_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk} s_k, \tag{7}$$

从而有

$$[H, s_i] = [cs_l p_l, s_i] = \mathrm{i}c\varepsilon_{ijk} s_j p_k. \tag{8}$$

与(6)式对比可得

$$[H, \boldsymbol{L} + \hbar \boldsymbol{s}] = 0, \tag{9}$$

这表明 $\hbar\boldsymbol{s}$ 是有旋角动量. 不难验证 $\boldsymbol{s}^2 = 2$, 因此光子自旋为 1. (4)式的这一特征是特别令人满意的.

2 量子化

下面对(4)式进行无约束的量子化. $\mathscr{L}$ 为 (回到自然单位制)

$$\mathscr{L} = \psi^+ (\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{p}) \psi, \tag{10}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

而正则动量为

$$\Pi = \mathrm{i}\psi^{+}, \tag{11}$$

正则对易关系为

$$[\psi,\ \Pi] = [\psi,\ \mathrm{i}\psi^{+}] = \mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\ [\psi,\ \psi] = [\psi^{+},\ \psi^{+}] = 0, \tag{12}$$

其分量形式为$[\psi_i, \Pi_j] = \mathrm{i}\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})$ 等．由式(10)和(11)可得

$$H = \int (\Pi\dot{\psi} - \mathscr{L})\mathrm{d}V = \int \psi^{+}\ \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}\psi\ \mathrm{d}V, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{P} = -\int \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\nabla\psi\mathrm{d}V = \int \psi^{+}\boldsymbol{p}\psi\mathrm{d}V. \tag{14}$$

由 $\dot{\psi} = \mathrm{i}[H,\psi]$ 易知算符 ψ 满足的方程与(4)同形．下面求其平面波解 $\psi = \psi_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$. 代入(4)式可得($E=\omega$, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$)

$$\begin{bmatrix} -E & -\mathrm{i}p_3 & \mathrm{i}p_2 \\ \mathrm{i}p_3 & -E & -\mathrm{i}p_1 \\ -\mathrm{i}p_2 & \mathrm{i}p_1 & -E \end{bmatrix}\psi_0 = 0 .$$

它有非平凡解的条件是

$$\begin{bmatrix} -E & -\mathrm{i}p_3 & \mathrm{i}p_2 \\ \mathrm{i}p_3 & -E & -\mathrm{i}p_1 \\ -\mathrm{i}p_2 & \mathrm{i}p_1 & -E \end{bmatrix} = 0 ,$$

从而 $E=\pm|\boldsymbol{p}|$ 或 $E=0$. 因为 $E=0$ 对应的是静场部分，不在考虑之列(从能量为 0 看也应如此)，因而只有 $E=\pm|\boldsymbol{p}|$, 它们对应于下列解 ($\omega_k = |\boldsymbol{k}|$)：

$$\left.\begin{aligned} u(\boldsymbol{k},\omega_k;\ \boldsymbol{x}t) &= u_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_k t)}, \\ v(\boldsymbol{k},\omega_k;\ \boldsymbol{x}t) &= v_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\omega_k t)}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中 u_k 和 v_k 选取需使

$$\left.\begin{aligned} &\int u(\boldsymbol{k},\omega_k;\ \boldsymbol{x}t)^{+}u(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\ \boldsymbol{x}t)\mathrm{d}V = \delta_{kk'}, \\ &\int v(\boldsymbol{k},\omega_k;\ \boldsymbol{x}t)^{+}v(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\ \boldsymbol{x}t)\mathrm{d}V = \delta_{kk'}, \\ &\int u^{+}(\boldsymbol{k},\omega_k;\ \boldsymbol{x}t)\,v(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\ \boldsymbol{x}t)\mathrm{d}V = 0, \\ &\int v^{+}(\boldsymbol{k},\omega_k;\ \boldsymbol{x}t)\,u(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\ \boldsymbol{x}t)\mathrm{d}V = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

由于 u_k 和 v_k 是厄米算符 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}$ 的属不同本征值的本征函数，因而

$$u_k^{+}v_{k'} = v_k^{+}u_{k'} = 0. \tag{17}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.   All rights reserved.

式(16)的后两式由(17)保证；前两式 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$ 时由 u_k 和 v_k 模的选取保证，$\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{k}'$ 时由指数函数正交性保证. 波场的一般解可写成

$$\psi=\sum_k a_k u(\boldsymbol{k}\omega_k;\ \boldsymbol{x}t)+b_k v(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t), \tag{18}$$

$$\psi^+=\sum_k a_k^+ u^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)+b_k^+ v^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t), \tag{19}$$

利用(16)式，由上两式可得

$$a_k=\int u^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)\psi\,\mathrm{d}V,\quad a_k^+=\int\psi^+u(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)\mathrm{d}V,$$

$$b_k=\int v^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)\psi\,\mathrm{d}V,\quad b_k^+=\int\psi^+v(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)\mathrm{d}V.$$

计算可得

$$\begin{aligned}[a_k,a_{k'}^+]&=\iint u^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)u(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}'t)[\psi\psi^+]\mathrm{d}V\mathrm{d}V'\\&=\iint u^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)u(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}'t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V\mathrm{d}V'\\&=\int u^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)u(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}'t)\mathrm{d}V\\&=\delta_{kk'}.\end{aligned} \tag{20}$$

其余类似，于是得到对易子

$$[a_k,a_k^+]=[b_k,b_k^+]=\delta_{kk'};\quad 其余为零 \tag{21}$$

最后求场的能量、动量. 先计算动量.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\int\psi^+\boldsymbol{p}\psi\,\mathrm{d}V\\&=\int\{\sum_k[a_k^+u^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)+b_k^+v^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)]\\&\quad\cdot\sum_{k'}[\boldsymbol{k}'a_{k'}u(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}t)+\boldsymbol{k}'b_{k'}v(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}t)]\}\mathrm{d}V\\&=\sum_{k'}(a_k^+a_k+b_k^+b_k)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{22}$$

但是对于能量却碰到一个问题：$H=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}$ 的本征值可取 $-\omega_k$. 出现这一结果是因为 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}$ 是自旋沿动量方向的投影，的确可正可负. 然而作为能量却不允许有负的本征值. 这一问题也存在于中微子的二分量理论中，它对于静质量为零的粒子具有一定的普遍性. 这个问题提醒人们：描述体系运动的 Hamiltonion 算符并不总能够诠释为能量的. 在所碰到的情形中，可以构造一个正定的新守恒量

$$E=AH, \tag{23}$$

其中 A 作用于 H 的正负本征态 $|\psi_i\rangle$，分别得 $|\psi_i\rangle$ 和 $-|\psi_i\rangle$. 若 $|\psi\rangle=\sum_i c_i|\psi_i$, 则 $A|\psi\rangle=\sum_i c_iA|\psi_i\rangle$. 可以证明 E 是正定的：

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\langle\psi|E|\psi\rangle=[\sum_i(c_{i+}^*\langle i+|+c_{i-}^*\langle i-|)]\,AH\,[\sum_i(c_{i+}|i+\rangle+c_{i-}|i-\rangle)]$$
$$=[\sum_i(c_{i+}^*\langle i+|+c_{i-}^*\langle i-|)]\,[\sum_i(c_{i+}E_i|i+\rangle+c_{i-}E_i|i-\rangle)]$$
$$=\sum_i(|c_{i+}|^2E_i+|c_{i-}|^2E_i)\geqslant 0,$$

式中，$|i\pm\rangle$表示 H 的本征值为 $\pm E_i$ 的本征态. 还可证明$[H,E]=0$:

$$HE|\psi\rangle=HAH[\sum_i(c_{i+}|i+\rangle+c_{i-}|i-\rangle)]=\sum_i(c_{i+}E_i^2|i+\rangle-c_{i-}E_i^2|i-\rangle)],$$

$$EH|\psi\rangle=AHH[\sum_i(c_{i+}|i+\rangle+c_{i-}|i-\rangle)]=\sum_i(c_{i+}E_i^2|i+\rangle-c_{i-}E_i^2|i-\rangle)],$$

因此，对一切 $|\psi\rangle$有$[H,E]|\psi\rangle=0$, 故$[H,E]=0$.

E 就是所定义的能量算符. 量子场能量就由

$$E=\int\psi^+E\psi\,\mathrm{d}V \tag{24}$$

给出. 这一方法适用于所有静质量为零的粒子的理论. 由(24)式可得

$$E=\int\mathrm{d}V\{\sum_k[a_k^+u^+(\boldsymbol{k}'\omega_k;\boldsymbol{x}t)+b_k^+V^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)]\cdot AH$$
$$\cdot\sum_k[a_{k'}u(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}t)+b_{k'}v(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}t)]\}$$
$$=\int\mathrm{d}V\{\sum_k[a_k^+u^+(\boldsymbol{k}'\omega_k;\boldsymbol{x}t)+b_k^+V^+(\boldsymbol{k}\omega_k;\boldsymbol{x}t)]$$
$$\cdot\sum_{k'}[\omega_{k'}a_{k'}u(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}t)+\omega_{k'}b_{k'}v(\boldsymbol{k}'\omega_{k'};\boldsymbol{x}t)]\}$$
$$=\sum_k(a_k^+a_k+b_k^+b_k)\omega_k. \tag{25}$$

从(22)和(25)式中可看出光子场的能量动量是由两种光子携带的. 由于 u、v 分别是 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}$ 的正负本征态，因此它们代表左右旋光子，其物理意义远比传统方案中指标 λ 更为清晰. 在我们的方案中也可以清楚地看到为什么 $s=1$ 的光子只有两个自旋分量. 当然最重要的是它避免了前面提到的量子化时的困难，这些困难部分地源于量子化中约束条件(规范)的引入，而这里的方案是无约束的. 此外作为非量子化的(4)式本身的一大优点是它以一种漂亮的方式导出了光子的自旋.

参 考 文 献

1 Gupta SN. Quantum electrodynamics. New York: Gordon and Breach Science Publishers, Inc, 1977. 59～64

2 Landau LD, Lifshitz EM. Quantum electrodynamics. Oxford: Pergamon Press, Ltd, 1982. 15

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

New approach to the quantization of electromagnetic field

Lu Changhai
(*Department of Physics*)

Abstract In this paper, a new approach to the quantization of electromagnetic field is studied. A new form of equation discribing photon is discussed. By quantizing this equation, the shortcomings and difficulties caused by the gauge conditions in traditional approaches are avoided.

Keywords electromegnetic field equation; field quantization; energy operator

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.